

6

Rekenregels en formules

Wat leer je?

- Formules combineren en herleiden.
- Hoe je met de grafische rekenmachine bijzonderheden van grafieken opspoort.
- De rekenregels voor machten en wortels gebruiken.
- Werken met formules met breuken.
- Herleiden van formules met exponenten.



Beginopdracht De eland

Elanden leven in noordelijke streken, met name in Scandinavische landen, Siberië en Canada. Mannetjes kunnen wel 800 kilogram wegen. Vrouwtjeselanden zijn een stuk kleiner en hebben een gewicht tot 375 kilogram.

De hoeveelheid energie die een eland per dag nodig heeft om op gewicht te blijven is afhankelijk van het gewicht. Deze energie geven we aan met E_{basis} .

Elanden zijn een groot gedeelte van de dag bezig met het zoeken naar voedsel, wat veel tijd en energie kost. Als er voldoende voedsel wordt gevonden, krijgt een eland meer energie binnen dan dat het zoeken ernaar kost. De energie die overblijft geven we aan met $E_{\text{beschikbaar}}$. Deze energie moet dus minimaal gelijk zijn aan E_{basis} om op gewicht te blijven. Voor energie gebruiken we de eenheid kcal.

Een groep biologen heeft onderzoek gedaan naar elanden en is tot de onderstaande tabel gekomen. In de tabel is W het gewicht van een eland in kilogram. Je ziet dat een eland met een gewicht van 200 kg om op gewicht te blijven per dag 7400 kcal nodig heeft en 11 600 kcal beschikbaar heeft.

W	50	100	150	200	250	300	350	400
E_{basis}	2600	4400	6000	7400	8800	10 100	11 300	12 500
$E_{\text{beschikbaar}}$	2100	6500	9440	11 600	13 300	14 600	15 700	16 500

- Bij het optimale gewicht van een eland is $E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$ maximaal. Dan blijft er namelijk zo veel mogelijk energie over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel. Geef een schatting van het optimale gewicht.
- Zet de punten van de tabel uit in één figuur. Neem W op de horizontale as en E op de verticale as. Verbind de punten van E_{basis} door een vloeiende kromme. Doe dat ook voor de punten van $E_{\text{beschikbaar}}$.
- De grafieken hebben een snijpunt. Welk gewicht hoort er bij het snijpunt? Geef de praktische betekenis van dit snijpunt.

De biologen hebben formules opgesteld die bij de tabel horen. Deze formules zijn:

$$E_{\text{basis}} = 140W^{0,75} \text{ en } E_{\text{beschikbaar}} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500.$$

- Controleer deze formules voor $W = 100$ en $W = 400$.

Een elandjong is na de geboorte afhankelijk van moedermelk. Deze afhankelijkheid duurt totdat het kalf zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.

- Kan volgens de formules een elandkalfje van 55 kg al zelfstandig voor zijn voedsel zorgen? Licht toe.

Voorkennis Haakjes wegwerken en variabelen vrijmaken

Theorie A Haakjes wegwerken

Voor het wegwerken van haakjes gebruik je de volgende regels.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Voorbeeld

Werk de haakjes weg en herleid.

a $(2x - 1)(3x + 1)$

b $(p - 2q)^2$

c $y(y - 1)^2$

Uitwerking

a $(2x - 1)(3x + 1) = 6x^2 + 2x - 3x - 1 = 6x^2 - x - 1$

b $(p - 2q)^2 = (p - 2q)(p - 2q) = p^2 - 2pq - 2pq + 4q^2 = p^2 - 4pq + 4q^2$

c $y(y - 1)^2 = y(y - 1)(y - 1) = y(y^2 - y - y + 1) = y(y^2 - 2y + 1) = y^3 - 2y^2 + y$

1 Werk de haakjes weg en herleid.

a $5(2x - 1) - 2(3x + 1)$

b $(x - 1)(x - 2)$

c $(4x + 1)(4x - 1)$

d $(3a - 2b)^2$

e $5(p - 3q)^2$

f $2m(m + 1)^2$

Theorie B Variabelen vrijmaken

In de vergelijking $2x + 3y = 6$ kun je de variabele y vrijmaken.

Je krijgt

$$2x + 3y = 6$$

$$3y = -2x + 6$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

In de formule $y = -\frac{2}{3}x + 2$ is y uitgedrukt in x .

Voorbeeld

Maak y vrij bij $3(x + 2) - 4(y - 1) = 16$.

Uitwerking

$$3(x + 2) - 4(y - 1) = 16$$

$$3x + 6 - 4y + 4 = 16$$

$$-4y = -3x + 6$$

$$y = \frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2}$$

- 2**
- a** Maak y vrij bij $4x - 3y = 9$.
 - b** Maak m vrij bij $2(m - 3) - 4n = 6$.
 - c** Gegeven is $5(p - 2q) - 3(p + 3) = 15$.
Druk p uit in q .
 - d** Gegeven is de formule $B = 2(A - 4) + 5(4 - A)$.
Druk A uit in B .

6.1 Formules combineren en herleiden



Om het leesniveau van leesboekjes voor kinderen in het Engelse taalgebied te bepalen, is door de Amerikanen Flesch en Kincaid de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ ontwikkeld. In deze formule is G een geheel getal dat de 'grade' aangeeft. Grade 1 is het niveau van 6-jarigen en grade 12 is het niveau van 17-jarigen. Verder staat W voor woordlengte, dat is het gemiddeld aantal lettergrepen per woord en Z voor zinslengte, dat is het gemiddeld aantal woorden per zin.

- a** Bereken de grade van een leesboek waarin het gemiddeld aantal lettergrepen per woord 1,9 is en het gemiddeld aantal woorden per zin 7,9.

In vraag a geldt $Z = W + 6$.

- b** Licht dit toe.

Voor teksten waarvoor geldt $Z = W + 6$ gaat de formule van G over in $G = 11,8W + 0,39(W + 6) - 15,59$ en dit is te herleiden tot $G = 12,19W - 13,25$.

- c** Laat deze herleiding zien.

- d** Bereken de grade van een tekst waarvoor geldt $Z = W + 6$ en waarin het gemiddeld aantal lettergrepen per woord gelijk is aan 1,5.

Theorie A Lineaire vormen combineren en herleiden

In opgave 1 is de formule $Z = W + 6$ ingevuld in de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$. We zeggen dat we de twee formules hebben **gecombineerd**. We zeggen ook wel 'de formule $Z = W + 6$ is gesubstitueerd in de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ '.

Substitueren betekent 'vervangen door'. Je hebt Z vervangen door $W + 6$. Bij het substitueren krijg je vaak met het wegwerken van haakjes te maken.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ en $W = Z - 7,5$. Schrijf de formule van G in de vorm $G = aZ + b$.

Uitwerking

Invullen van $W = Z - 7,5$ in $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$ geeft

$$G = 11,8(Z - 7,5) + 0,39Z - 15,59 \quad \leftarrow \dots \dots \dots \text{Denk aan haakjes om } Z - 7,5.$$

$$G = 11,8Z - 88,5 + 0,39Z - 15,59$$

$$G = 12,19Z - 104,09$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$ en $k = 1,4l + 150$.
De formule van A is te schrijven in de vorm $A = al + b$.
Bereken a en b .

Uitwerking

Invullen van $k = 1,4l + 150$ in $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$ geeft
 $A = 0,03(1,4l + 150) - 0,6(l - 20)$
 $A = 0,042l + 4,5 - 0,6l + 12$
 $A = -0,558l + 16,5$
Dus $a = -0,558$ en $b = 16,5$.

2
□ ⊗ *

- a** Zie het voorbeeld op de vorige bladzijde met de formule $G = 11,8W + 0,39Z - 15,59$.
Neem $Z = 5W$ en schrijf de formule van G in de vorm $G = aW + b$.
b Zie het voorbeeld hierboven met de formule $A = 0,03k - 0,6(l - 20)$.
Neem $l = -0,25k + 15$ en schrijf de formule van A in de vorm $A = ak + b$.

3
□ ⊗

- a** Gegeven zijn de formules $R = 3p - 4q + 5$ en $p = 1,5q + 2$.
Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq + b$.
b Gegeven zijn de formules $F = 0,16m - 0,4(5 - 2n)$ en $m = 3 - 2n$.
De formule van F is te schrijven in de vorm $F = an + b$.
Bereken a en b .

4
□ ⊗ *

- Gegeven zijn de formules $B = 0,0012(600 - 18K)$ en $K = 0,16L$.
a Neem $L = 25$ en bereken K en B .
b Druk B uit in L .
c Bereken L voor $B = 0,288$ door een vergelijking op te lossen.

E5
*

- Van de gehele positieve getallen a , b en c is bekend dat $2a + b = c$ en $4a + 2b + c = 21$.
Bereken c en geef mogelijke waarden voor a en b .

6
□ ⊗ *

Het aantal blikken verf q dat een winkelier per week verkoopt is gegeven door de formule $q = -10p + 0,3A + 150$. Hierin is p de verkoopprijs van een blik in euro's en A het bedrag in euro's dat de winkelier per week aan reclame uit geeft.

- De winkelier geeft in een week 240 euro aan reclame uit. Die week heeft hij 117 blikken verf verkocht.
Bereken de prijs van een blik.
- De winkelier besluit om per week tien keer de verkoopprijs van één blik aan reclame uit te geven.
Druk voor deze situatie q uit in p .
- In een andere week besluit de winkelier 30 euro aan reclame uit te geven vermeerderd met vijf keer de prijs van één blik.
Toon aan dat in dat geval $q = -8,5p + 159$.
- De winkelier besluit voortaan uit te gaan van de formule $A = 2p + 8$.
Schrijf de formule van q in de vorm $q = ap + b$.

Aantonen van de juistheid van een formule betekent dat je stap voor stap naar de formule toe werkt. Je kunt niet volstaan met het geven van getallenvoorbeelden.

A7
□ ⊗ *

Om te weten hoeveel voedingsstoffen een paard nodig heeft, moet het gewicht van het paard bekend zijn. Omdat het niet zo handig is daarvoor telkens een weegschaal te gebruiken, schatten paardenhouders het gewicht met een formule.

- fokmerries: $G = 5,2BO + 2,6SH - 855$
- rijpaarden: $G = 4,3BO + 3,0SH - 785$

Hierin is G het gewicht in kg, BO de borstomvang in cm en SH de schofthoogte in cm.

- Een fokmerrie heeft een borstomvang van 1,80 meter en een schofthoogte van 1,68 meter.
Bereken het gewicht van de merrie.
- Door een meetfout wordt bij een rijpaard de borstomvang 5 cm te groot gemeten.
Beredeneer hoeveel kg de schatting van het gewicht te hoog uitvalt.
- Druk voor rijpaarden waarvoor geldt $BO = SH + 12$ het gewicht G uit in SH .
- Een fokmerrie en een rijpaard zijn even zwaar. Van de merrie is $BO = 180$ en van het rijpaard is $BO = 185$.
De paarden hebben dezelfde schofthoogte.
Bereken deze schofthoogte in cm nauwkeurig.



figuur 6.1



A8

In opgave 1 heb je gewerkt met de formule van Flesch en Kincaid waarmee de leesbaarheid van een tekst kan worden bepaald.

Computers kunnen ook de leesbaarheid van een tekst bepalen.

Hiervoor is de *Automated*

Readability Index (ARI)

ontwikkeld. De *ARI* gebruikt per woord het aantal tekens in plaats van het aantal lettergrepen, omdat het aantal lettergrepen voor een computer moeilijk te bepalen is.

De formule is $ARI = 4,71T + 0,5Z - 21,43$. Hierin is T het gemiddeld aantal tekens per woord en Z het gemiddeld aantal woorden per zin.

- a Een tekst bestaat uit 12 zinnen met in totaal 90 woorden en 495 tekens.
Bereken de *ARI*.
- b Iemand voegt drie zinnen van de tekst van vraag a samen tot één zin.
Het totale aantal woorden en tekens van de tekst verandert niet.
Bereken hoe de *ARI* verandert.
- c Voor teksten waarvoor geldt $Z = T + 3$ is de formule van *ARI* te schrijven in de vorm $ARI = aT + b$.
Bereken a en b .
- d Een *ARI* van 1 hoort bij het niveau van 6-jarigen, een *ARI* van 2 hoort bij het niveau van 7-jarigen, enzovoort.
Verander de formule zo, dat je het niveau krijgt van de bijbehorende leeftijd L , dus schrijf de formule in de vorm $L = aT + bZ + c$.

**09**

Gegeven zijn de formules $T = m^2 + 4n + 2$ en $m = n - 1$.

- a Bereken T voor $n = 5$.

Substitutie van $m = n - 1$ in $T = m^2 + 4n + 2$ geeft $T = (n - 1)^2 + 4n + 2$.

- b Toon aan dat dit te herleiden is tot $T = n^2 + 2n + 3$.

Theorie B Kwadratische vormen combineren en herleiden

Je kunt de formules $T = m^2 + 4n + 2$ en $m = 2n + 3$ combineren tot de vorm $T = an^2 + bn + c$.

Substitutie van $m = 2n + 3$ in $T = m^2 + 4n + 2$ geeft

$$T = (2n + 3)^2 + 4n + 2$$

$$T = (2n + 3)(2n + 3) + 4n + 2$$

$$T = 4n^2 + 6n + 6n + 9 + 4n + 2$$

$$T = 4n^2 + 16n + 11$$

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 3,5k^2l$ en $k = l - 2$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = al^3 + bl^2 + cl$.

Bereken a , b en c .

Uitwerking

Invullen van $k = l - 2$ in $A = 3,5k^2l$ geeft

$$A = 3,5(l - 2)^2 \cdot l$$

$$A = 3,5l(l - 2)(l - 2)$$

$$A = 3,5l(l^2 - 2l - 2l + 4) \quad \leftarrow \dots \dots \dots \text{Denk aan de haakjes.}$$

$$A = 3,5l(l^2 - 4l + 4)$$

$$A = 3,5l^3 - 14l^2 + 14l$$

Dus $a = 3,5$, $b = -14$ en $c = 14$.

- 10** Zie het voorbeeld met de formule $A = 3,5k^2l$.
Neem $k = l + 2$ en schrijf A in de vorm $A = al^3 + bl^2 + cl$.

- 11** a Gegeven zijn de formules $B = 3t^2 - 4s^2 + 5$ en $s = t - 2$.
Schrijf de formule van B in de vorm $B = at^2 + bt + c$.
b Gegeven zijn de formules $N = 15a^2b$ en $a = 2b - 3$.
Toon aan dat hieruit volgt $N = 60b^3 - 180b^2 + 135b$.

- A12** Tussen de prijs p in euro's en het aantal ijsjes q dat ijscoman Jan per dag verkoopt bestaat het verband $p = -0,002q + 3,10$. De dagopbrengst R in euro's kan worden berekend door de prijs van een ijsje te vermenigvuldigen met het aantal verkochte ijsjes, oftewel $R = p \cdot q$.

- a Schrijf de formule van R in de vorm $R = aq^2 + bq$.
b Bereken de dagopbrengst bij een verkoop van 500 ijsjes per dag. Hoeveel kost een ijsje dan?

Jan heeft ook kosten. De kosten per dag in euro's worden gegeven door de formule $K = 0,70q + 180$.

- c Bereken K als Jan per dag 500 ijsjes verkoopt.
Hoeveel winst maakt Jan dan per dag?

De winst per dag in euro's kan worden berekend door van de opbrengst R de kosten K af te trekken. Je krijgt zo de formule $W = -0,002q^2 + 2,40q - 180$.

- d Toon dit aan.
e Jan verkoopt 450 ijsjes per dag.
Bereken de winst per dag en de prijs van een ijsje.
f Met hoeveel procent neemt de winst per dag toe als het aantal per dag verkochte ijsjes toeneemt van 400 naar 550?



E13 Gegeven zijn de formules $A = 3p^2 - 36q + 5$ en $p = aq + 3$.

- * Er is een waarde van a waarvoor de formule van A te schrijven is in de vorm $A = mq^2 + n$.
Bereken a , m en n .

O14 Gegeven zijn de formules $N = 3p + 4q - 5$ en $q = 0,5p - 3$.

- ⊗ * **a** Druk N uit in p en herleid.

Om N uit te drukken in q maak je eerst p vrij bij de formule $q = 0,5p - 3$.

Je krijgt $p = 2q + 6$.

- b** Licht toe hoe uit $q = 0,5p - 3$ volgt dat $p = 2q + 6$.

De formules $N = 3p + 4q - 5$ en $p = 2q + 6$ zijn te combineren tot de formule $N = 10q + 13$.

- c** Toon dit aan.

Theorie C Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $K = 18 + 2p + 3q$ en $q = 5p + 30$ zijn te combineren waarbij K is uitgedrukt in p maar ook zo dat K is uitgedrukt in q .

Om K uit te drukken in q maak je eerst p vrij bij de formule $q = 5p + 30$.

$q = 5p + 30$ geeft $5p = q - 30$, dus $p = 0,2q - 6$.

$$\left. \begin{array}{l} K = 18 + 2p + 3q \\ p = 0,2q - 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K = 18 + 2(0,2q - 6) + 3q \\ K = 18 + 0,4q - 12 + 3q \\ K = 3,4q + 6 \end{array}$$

De accolade geeft aan welke formules gecombineerd worden.

Voorbeeld

Gegeven zijn de formules $A = 8s + 3t + 850$ en $2s - 5t = 40$.

Schrijf de formule van A in de vorm $A = at + b$.

Aanpak

Maak eerst s vrij bij $2s - 5t = 40$.

Uitwerking

$$2s - 5t = 40$$

$$2s = 5t + 40$$

$$s = 2,5t + 20$$

$$\left. \begin{array}{l} A = 8s + 3t + 850 \\ s = 2,5t + 20 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = 8(2,5t + 20) + 3t + 850 \\ A = 20t + 160 + 3t + 850 \\ A = 23t + 1010 \end{array}$$

Om A uit te drukken in t , moet in de formule $A = 8s + 3t + 850$ de variabele s worden vervangen door een formule waarbij s is uitgedrukt in t .

15 Zie het voorbeeld.

- ⊗ * Druk A uit in s en herleid.

16
☐⊙

- a** Combineer de formules $T = 3r + 6s + 80$ en $r + 8s = 100$ tot de vorm $T = as + b$.
- b** Combineer de formules $C = 2a - 3b + 64$ en $5a - 8b = 160$ tot de vorm $C = ma + n$.

17
☐⊙*

Gegeven zijn de formules $Q = 5m - n + 125$ en $3m + 5n = 12$.

De formule van Q is te herleiden tot $Q = 5,6m + 122,6$.

- a** Laat deze herleiding zien.
- b** Bereken m voor $Q = 201$. Welke waarde van n hoort hierbij?

A18
☐⊙*

a Gegeven zijn de formules $A = 2t + 5p + 9$ en $t = -\frac{1}{3}p + 3\frac{2}{3}$.

De formule van A is te schrijven in de vorm $A = at + b$.

Bereken a en b .

b De formules $B = 5xy + 20$ en $3x - 2y = 6$ zijn te combineren tot de vorm $B = ax^2 + bx + c$.

Bereken a , b en c .

E19
*

Gegeven zijn de formules $N = 6pq - 2p^2 + 4$ en $2p + 3q = 8$ en $q = p + 1$.

Bereken N .

Terugblik

Formules combineren

De formules $D = 5x + 3y + 30$ en $x = 12 - 2y$ zijn te combineren tot de vorm $D = ay + b$.

$$\begin{array}{l} D = 5x + 3y + 30 \\ x = 12 - 2y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} D = 5(12 - 2y) + 3y + 30 \\ D = 60 - 10y + 3y + 30 \\ D = -7y + 90 \end{array} \right.$$

Je ziet dat $a = -7$ en $b = 90$.

De formules $E = 0,1p^2 - 0,02q + 4,5$ en $p = 0,5q + 1$ zijn te combineren tot de vorm $E = aq^2 + bq + c$.

Invullen van $p = 0,5q + 1$ in $E = 0,1p^2 - 0,02q + 4,5$ geeft

$$\begin{aligned} E &= 0,1(0,5q + 1)^2 - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,1(0,5q + 1)(0,5q + 1) - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,1(0,25q^2 + 0,5q + 0,5q + 1) - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,1(0,25q^2 + q + 1) - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,025q^2 + 0,1q + 0,1 - 0,02q + 4,5 \\ E &= 0,025q^2 + 0,08q + 4,6 \end{aligned}$$

Variabelen vrijmaken en formules combineren

De formules $D = 5x + 3y + 30$ en $3x - 2y = 28$ zijn te combineren tot de vorm $D = ax + b$.

Eerst maak je y vrij bij de formule $3x - 2y = 28$.

Je krijgt $-2y = -3x + 28$, dus $y = 1,5x - 14$.

$$\begin{array}{l} D = 5x + 3y + 30 \\ y = 1,5x - 14 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} D = 5x + 3(1,5x - 14) + 30 \\ D = 5x + 4,5x - 42 + 30 \\ D = 9,5x - 12 \end{array} \right.$$

Is bovendien gegeven dat $D = 140$, dan kun je x en y berekenen.

Je krijgt $9,5x - 12 = 140$ oftewel $9,5x = 152$, dus $x = 16$.

$x = 16$ en $y = 1,5x - 14$ geeft $y = 1,5 \cdot 16 - 14 = 10$.

6.2 Formules en de grafische rekenmachine

020
☐⊗*

Gegeven zijn de formules $y_1 = 0,35x + 2$ en $y_2 = -0,16x + 8$.

- a Voer de formules in op de GR en plot de grafieken. Neem x en y tussen 0 en 10.
Waarom staat het snijpunt van de grafieken niet op het scherm?
- b Kies x en y zo, dat het snijpunt wel op het scherm staat en bereken de coördinaten van het snijpunt. Rond af op twee decimalen.

Theorie A Grafieken plotten en toppen berekenen

In de module **Formules, grafieken en snijpunten** heb je geleerd hoe je met de GR de coördinaten berekent van het snijpunt van grafieken van lineaire formules.

In de module **Formules en tabellen** heb je geleerd hoe je met de GR een tabel maakt bij een formule.

In de volgende module leer je hoe je met de GR coördinaten van toppen van grafieken berekent.

In opgave 20 heb je gezien dat het snijpunt van de grafieken niet op het scherm van de GR stond. Bij het plotten van grafieken is het van belang na te denken welke waarden van x en y je kiest voor het scherm. Het scherm met deze waarden van x en y noemen we het **venster** van de GR. Uit de context van de opgaven blijkt vaak wat geschikte waarden van x of y zijn voor het venster.

[►GR] Neem nu de module **Grafieken, toppen en snijpunten** van de handleiding GR door.

Let op het verschil tussen de opdrachten plotten, schetsen en tekenen van de grafiek.

Plot de grafiek	Schets de grafiek	Teken de grafiek
Laat de GR de grafiek op het scherm tekenen. Kies het venster zo, dat alle bijzonderheden van de grafiek op het scherm te zien zijn.	Maak in je schrift een schets van de grafiek. Het gaat alleen om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van de assen. Je mag daarbij de GR gebruiken. Zet letters bij de assen.	Teken in je schrift nauwkeurig de grafiek en zet getallen en letters bij de assen. Maak eerst een tabel in je schrift. Gebruik daarbij de GR.

Bij berekeningen die je met de GR maakt, hoort een toelichting. Zo vermeld je de formules die je invoert en de gebruikte opties. We herinneren je aan de volgende afspraak.

Uitwerking bij gebruik van de GR

- 1** Noteer de formules die je invoert, dus schrijf op $y_1 = \dots$ en $y_2 = \dots$
- 2** Noteer de optie(s) die je gebruikt en geef het resultaat.
- 3** Beantwoord de gestelde vraag.

Voorbeeld

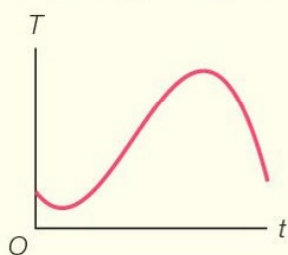
De temperatuur van het zeewater voor de Nederlandse kust wordt beschreven door de formule $T = -0,093t^3 + 1,39t^2 - 3,28t + 4,7$. Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari en $0 \leq t \leq 12$.

- a** Schets de grafiek van T .
- b** Bereken de temperatuur op 1 juli. Rond af op één decimaal.
- c** In welke maand is de temperatuur van het zeewater minimaal? Wat is de minimale temperatuur?
- d** In welke maanden was de temperatuur van het zeewater 14°C ?

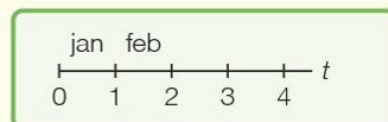
Uitwerking

- a** Voer in $y_1 = -0,093x^3 + 1,39x^2 - 3,28x + 4,7$.

$0 \leq t \leq 12$, dus neem in het venster x tussen 0 en 12.



- b** Bij 1 juli hoort $t = 6$.
 $t = 6$ geeft $T \approx 15,0^\circ\text{C}$
- c** De optie minimum geeft $x \approx 1,4$ en $y \approx 2,6$.
Dus in februari. De minimale temperatuur is $2,6^\circ\text{C}$.
- d** Voer in $y_2 = 14$.
De optie snijpunt geeft $x \approx 5,7$ en $x \approx 10,8$.
Dus in de maanden juni en november.



Zie het voorbeeld.

- a** In welke maand is de temperatuur van het zeewater maximaal? Wat is de maximale temperatuur?
- b** In welke maanden kwam de temperatuur van het zeewater boven de 19°C ?

- 22** De winst W van een bedrijf in honderden euro's wordt gegeven door de formule $W = -0,02q^2 + 5,2q - 200$. Hierin is q het aantal verkochte artikelen met q kleiner dan 225.

- a Schets de grafiek van W .
- b Bereken de maximale winst.
- c Hoeveel artikelen moeten er verkocht worden om een winst van minstens 10000 euro te hebben?

Zet de juiste letters bij de assen.

- 23** Een fabrikant van elektrische apparaten brengt een nieuw model broodrooster op de markt. Een bedrijfseconoom heeft een formule opgesteld voor de opbrengst R per week in euro's bij een weekverkoop van q broodroosters: $R = -0,02q^2 + 30q$ met q kleiner dan 1200.

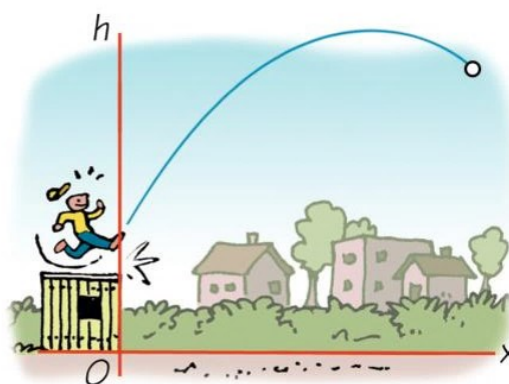
- a Schets de grafiek van R .
- b Voor welke q is de opbrengst maximaal? Hoeveel is de maximale opbrengst?
- c Hoeveel broodroosters moet de fabrikant per week verkopen om een opbrengst van minstens 8000 euro te hebben?

Het bedrijf heeft ook kosten. Per week zijn deze kosten gegeven door $K = 5q + 3000$.

- d De grafieken van K en R hebben twee snijpunten. Wat is de praktische betekenis van deze snijpunten? Welke aantallen verkochte broodroosters horen bij deze snijpunten?
- e Het bedrijf verkoopt in een week 600 broodroosters. Hoeveel euro is de winst die week?

- 24** Luuk staat op het platte dak van een schuur en trapt een bal weg. Zie figuur 6.2. De baan van de bal wordt gegeven door de formule $h = -0,09x^2 + 1,8x + 3$. Hierin zijn x en h in meter. Luuk kan de bal maximaal 25 meter weg trappen.

- a Hoe hoog is het schuurtje?
- b Bereken op welke afstand van het schuurtje de bal op de grond komt. Geef het antwoord in dm nauwkeurig.
- c Bereken de maximale hoogte van de bal.
- d Op 18 meter afstand van het schuurtje staat een boom die 5 meter hoog is. Luuk trapt de bal in de richting van de boom. Onderzoek of de bal over de boom heen gaat.



figuur 6.2

25
□ ⊙ *

Het benzineverbruik van een auto is gegeven door de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Hierin is B het benzineverbruik in liters per 100 km bij een snelheid van v km per uur.

- a Schets de grafiek van B .
- b Mevrouw Van Santen verhoogt haar snelheid van 80 tot 100 km per uur. Hoeveel neemt het benzineverbruik toe?
- c Meneer Van Ast verhoogt zijn snelheid van 30 tot 40 km per uur. Met hoeveel procent neemt het benzineverbruik af?
- d Mevrouw Tjong a Sie wil zo zuinig mogelijk rijden. Welke snelheid moet zij aanhouden?
- e Op een gegeven moment verbruikt de auto van meneer Vonk 4,5 liter per 100 km. Wat weet je van zijn snelheid? Rond af op gehelen.
- f Mevrouw Kerkhof rijdt met een constante snelheid. Ze moet nog 60 km rijden. In de tank zit nog 3 liter benzine. Met welke snelheid moet mevrouw Kerkhof rijden als ze zonder tanken op de plaats van bestemming wil aankomen?



26
*

Zie opgave 25 met de formule $B = 0,001v^2 - 0,12v + 7,8$. Meneer Yates rijdt met een snelheid van 120 km/uur over de snelweg. Met deze snelheid heeft hij genoeg benzine voor een afstand van 60 km, maar de eerstvolgende benzinepomp is 90 km verder. Hij wil de benzinepomp zo snel mogelijk bereiken. Met welke snelheid moet hij dan rijden? Rond af op gehelen.

A27
□ ⊙ *

De bedrijfseconoom van een supermarktketen heeft een formule opgesteld die beschrijft hoeveel klanten er op elk tijdstip op een vrijdag in één van de vestigingen aanwezig is.

Deze formule is $N = -0,15t^4 + 3,35t^3 - 24t^2 + 65t$. Hierin is N het aantal klanten t uur na het openingstijdstip van 8:00 uur.

- a Om de grafiek te plotten, kies je eerst een geschikt venster. Welke waarden voor x kies je hierbij? Licht toe en schets de grafiek van N .
- b Hoe laat is het volgens de formule het drukst in de supermarkt? Hoeveel klanten zijn er dan?
- c Hoe laat verlaten de laatste klanten de supermarkt?
- d Hoe laat zijn er evenveel klanten in de supermarkt als om kwart over drie?

A28
☐⊙*

Een jongerenblad start een reclamecampagne om de losse verkoop te verhogen. De campagne zal enkele maanden duren.

De uitgever van het blad hanteert voor het jaar na de start van de

reclamecampagne de formule $A = 9 + \frac{5}{(0,05t - 2)^2 + 1}$. Hierin is A het aantal wekelijks verkochte exemplaren in duizendtallen en t de tijd in weken met $t = 0$ op het moment dat de campagne begint.

- a Schets de grafiek van A .
- b Hoeveel weken na de start van de campagne is de losse verkoop het grootst? Hoeveel is de verkoop dan?
- c Gedurende hoeveel weken is de wekelijkse verkoop meer dan 13 500 exemplaren?

A29
⊙*

In een natuurgebied neemt de oppervlakte van de heide af, terwijl de oppervlakte van het gras toeneemt.

De oppervlakte van de heide is gegeven door de formule $H = 600 \cdot 0,95^t$ en de oppervlakte van het gras is gegeven door de formule

$G = 100\sqrt{t+1}$. In deze formules zijn H en G in hectare en is de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2015. Men neemt aan dat deze formules in elk geval zullen gelden tot het jaar 2030.

- a Schets de grafieken in één figuur.
- b Met hoeveel hectare is de oppervlakte van de heide afgenomen tussen 1 januari 2018 en 1 juli 2021? Rond af op één decimaal.
- c In welk jaar zal de oppervlakte van het gras gelijk zijn aan de oppervlakte van de heide? Hoeveel hectare heide is er dan nog?
- d Wat was de totale oppervlakte van de heide en het gras samen op 1 januari 2015? En wat zal de totale oppervlakte zijn op 1 januari 2025?
- e In welke maand van welk jaar was de totale oppervlakte van de heide en het gras samen maximaal? Hoeveel was toen de totale oppervlakte van heide en gras samen?



Terugblik

Formules en de GR

Op de GR kun je formules invoeren om de grafieken te plotten en tabellen te maken. De GR heeft opties om

- bij een formule een tabel te maken
- bij een gegeven x de y -waarde te berekenen
- de coördinaten van snijpunten van grafieken te berekenen
- de coördinaten van toppen te berekenen.

Gebruik je in de uitwerking van een opgave de GR, dan noteer je de formules die je invoert en de opties die je gebruikt. Verder geef je het resultaat en beantwoord je de gestelde vraag.

Bij een experiment in een laboratorium wordt het aantal bacteriën in de eerste twee weken van september gegeven door de formule $N = t^3 - 9t^2 + 200$. Hierin is N het aantal bacteriën in miljoenen en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 september om 0:00 uur. Omdat t de tijd in dagen is en de formule geldt voor de eerste twee weken, neem je in het venster x tussen 0 en 14.

Je berekent als volgt op welke datum het aantal bacteriën is toegenomen tot een half miljard.

Voer in $y_1 = x^3 - 9x^2 + 200$ en $y_2 = 500$.

De optie snijpunt geeft $x \approx 11,3$.

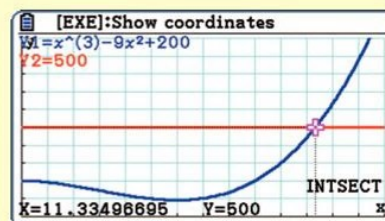
Op 12 september is het aantal bacteriën tot een half miljard toegenomen.

Je ziet in de grafiek dat het aantal bacteriën op een gegeven moment minimaal is. Dit minimum bereken je op de GR met de optie minimum. Je krijgt $x = 6$ en $y = 92$. Dus op 7 september om 0:00 uur is het aantal bacteriën minimaal. Het minimale aantal is 92 miljoen.

Op de GR is ook een tabel gemaakt, zie hiernaast.

Je leest daarin bijvoorbeeld af dat op de eerste dag het aantal bacteriën met 8 miljoen verminderde en dat er op de zevende dag 10 miljoen bacteriën bij kwamen.

Een half miljard is 500 miljoen, dus $y_2 = 500$. Twee weken is 14 dagen, dus $X_{\max} = 14$.



NORM DRIJF AUTO REËL RAD MN DRUK OP ENTER VOOR BEWERKEN				
X	Y1			
0	200			
1	192			
2	172			
3	146			
4	120			
5	100			
6	92			
7	102			
8	136			
9	200			
10	300			
$Y_1 = X^3 - 9X^2 + 200$				

6.3 Formules met breuken



Bereken zonder rekenmachine.

a $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$

b $4 \cdot \frac{2}{9}$

c $\frac{1}{7} : \frac{2}{3}$

d $\frac{3}{4} : 5$

Theorie A Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij de breuk $\frac{4}{12}$ kun je teller en noemer delen door 4.

Daarmee vereenvoudigt je de breuk. Je krijgt $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Ook de breuk $\frac{4x}{11x}$ kun je vereenvoudigen. Je deelt dan teller en noemer door x . Dit geeft $\frac{4x}{11x} = \frac{4}{11}$.

En zo is $\frac{18ab}{24b} = \frac{3a}{4}$.

Deel teller en noemer door $6b$.

$\frac{3a}{4}$ kun je schrijven als $\frac{3}{4}a$. Dit heet **de variabele uit de breuk halen**.

Haal je bij $\frac{4(x-1)}{5}$ de variabele x uit de breuk, dan krijg je $\frac{4}{5}(x-1)$.

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Dus $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ en $5 \cdot \frac{4}{21} = \frac{20}{21}$.

$$5 \cdot \frac{4}{21} = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{21}$$

Vereenvoudig de breuk.

En zo is $D = \frac{3x}{4} \cdot \frac{2}{5y}$ te herleiden tot $D = \frac{6x}{20y} = \frac{3x}{10y}$, dus $D = \frac{3x}{10y}$.

Neem je in deze formule $y = 2x$, dan is $D = \frac{3x}{10 \cdot 2x} = \frac{3x}{20x} = \frac{3}{20}$.

De formule $E = x \cdot \left(\frac{x}{5} + 2\right)$ kun je schrijven in de vorm $E = ax^2 + bx$.

Je krijgt $E = x \cdot \left(\frac{x}{5} + 2\right) = \frac{x^2}{5} + 2x = \frac{1}{5}x^2 + 2x$.

Haal de variabele uit de breuk.

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Dus $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Bij het herleiden van de formule $F = \frac{1}{5} : \frac{3}{x}$ krijg je

$$F = \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x}{15} = \frac{1}{15}x.$$

$$\text{breuk} = \frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$$

Het omgekeerde
van $\frac{a}{b}$ is $\frac{b}{a}$.

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $A = \frac{2}{7} \cdot \frac{x-y}{x}$ en werk de haakjes weg.
- b** Herleid de formule $B = \frac{2x}{5y} : \frac{4}{5}$.
- c** Neem $y = 4x$ in de formule $C = \frac{x+y}{x+2}$ en herleid.

Denk aan de haakjes.

Uitwerking

- a** $A = \frac{2}{7} \cdot \frac{x-y}{x} = \frac{2(x-y)}{7x} = \frac{2x-2y}{7x}$, dus $A = \frac{2x-2y}{7x}$
- b** $B = \frac{2x}{5y} : \frac{4}{5} = \frac{2x}{5y} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10x}{20y} = \frac{x}{2y}$, dus $B = \frac{x}{2y}$
- c** $y = 4x$ invullen geeft $C = \frac{x+4x}{x+2} = \frac{5x}{x+2}$, dus $C = \frac{5x}{x+2}$.

31



Haal bij de volgende formules de variabele x uit de breuk.

- a** $A = \frac{5x}{6}$ **d** $D = \frac{3(x-2)}{4}$
- b** $B = \frac{x}{8}$ **e** $E = \frac{15x}{4}$
- c** $C = \frac{2(x-3)}{5}$ **f** $F = \frac{12(x+2)}{4}$

32



Herleid de formule en werk zo nodig de haakjes weg.

- a** $A = \frac{3}{5} \cdot \frac{x+y}{y}$ **d** $D = \frac{a+1}{a} : \frac{1}{2}$
- b** $B = \frac{2x}{y} \cdot \frac{y+1}{4}$ **e** $E = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{x+1}{x}$
- c** $C = \frac{2a}{3b} : \frac{4}{9}$ **f** $F = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x+1}$

33



- a** Neem $y = 7x$ in de formule $A = \frac{x+y}{10}$ en herleid.
- b** Neem $y = 5x$ in de formule $B = \frac{x+y}{2x}$ en herleid.
- c** Neem $y = x + 2$ in de formule $C = \frac{x-4}{3-y}$ en herleid.

34
□ ⊗ *

- a** De formule $A = 0,15 \cdot \frac{x}{0,375} \cdot (x - 2)$ is te herleiden tot de vorm

$$A = ax^2 + bx.$$

Bereken a en b .

- b** De formule $B = 2p \cdot \left(\frac{p}{7} - 3\right)$ is te herleiden tot de vorm $B = ap^2 + bp$.

Bereken a en b . Rond a af op twee decimalen.

- c** De formule $C = 1,8 \cdot \frac{x+4}{2} : \frac{3}{x-1}$ is te herleiden tot de vorm

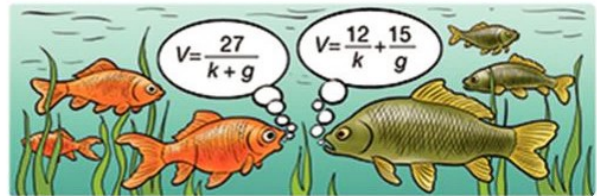
$$C = ax^2 + bx + c.$$

Bereken a , b en c .

A35
*

In een vijver zwemmen karpers en goudvissen. Het aantal karpers noemen we k en het aantal goudvissen g .

We bekijken eerst de situatie dat er 12 vrouwtjeskarpers zijn en 15 vrouwtjesgoudvissen. Het gedeelte van het totaal aantal vissen dat vrouwtje is, noemen we V .



Volgens José geldt in deze situatie de formule $V = \frac{27}{k + g}$.

Volgens Rik geldt in deze situatie de formule $V = \frac{12}{k} + \frac{15}{g}$.

Volgens Job komen de formules van José en Rik op hetzelfde neer.

- a** Wie heeft gelijk?

We bekijken nu een situatie waarin van de karpers een vierde deel vrouwtje is en van de goudvissen twee vijfde deel.

Hierbij hoort de formule $V = \frac{\frac{1}{4}k + \frac{2}{5}g}{k + g}$.

Deze formule is te herleiden tot $V = \frac{5k + 8g}{20(k + g)}$.

- b** Laat deze herleiding zien.

- c** Gebruik de formule $V = \frac{5k + 8g}{20(k + g)}$ om te berekenen welk percentage van de vissen in de vijver een vrouwtje is als er anderhalf keer zoveel goudvissen als karpers zijn.

E36
⊗ *

- a** Als een hoeveelheid water bevriest neemt het volume met $\frac{1}{11}$ deel toe. Met welk deel neemt het volume van een hoeveelheid ijs bij smelten af?

- b** Van de gasten (mannen, vrouwen en kinderen) op een bruiloftsfeest was $\frac{1}{8}$ deel kind. Van de volwassen bruiloftsgasten was $\frac{3}{7}$ deel man. Welk deel van de bruiloftsgasten was vrouw?

E37
*

Bereken $(1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{3}) \cdot (1 + \frac{1}{4}) \cdot (1 + \frac{1}{5}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{1001})$.

Bereken zonder rekenmachine.

- a $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ c $\frac{4}{5} - \frac{3}{7}$
b $\frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ d $1\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

Theorie B Breuken optellen en aftrekken

De breuken $\frac{5}{9}$ en $\frac{2}{9}$ zijn gelijknamig, want ze hebben dezelfde noemer.

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken.

Dus $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ en $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

En zo is de formule $A = \frac{2}{x} + \frac{3}{x}$ te herleiden tot $A = \frac{5}{x}$.

Om breuken die niet gelijknamig zijn op te tellen, maak je ze eerst gelijknamig.

Dus $\frac{5}{9} + \frac{3}{8} = \frac{40}{72} + \frac{27}{72} = \frac{67}{72}$ en $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

De nieuwe noemer
wordt $9 \cdot 8 = 72$.

Het is niet nodig om als
noemer $4 \cdot 8 = 32$ te nemen.

Schrijf je het rechterlid van de formule $B = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ als één breuk, dan

krijg je $B = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2y}{xy} + \frac{3x}{yx} = \frac{3x + 2y}{xy}$.

Schrijf je het rechterlid van de formule $C = \frac{4}{3x} - \frac{2}{x}$ als één breuk, dan

krijg je $C = \frac{4}{3x} - \frac{2}{x} = \frac{4}{3x} - \frac{6}{3x} = -\frac{2}{3x}$.

Voorbeeld

Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $F = \frac{2}{5p} - \frac{1}{4p}$

b $G = 5 + \frac{3}{2q}$

Uitwerking

a $F = \frac{2}{5p} - \frac{1}{4p} = \frac{8}{20p} - \frac{5}{20p} = \frac{3}{20p}$

b $G = 5 + \frac{3}{2q} = \frac{10q}{2q} + \frac{3}{2q} = \frac{10q + 3}{2q}$

Bedenk dat $5 = \frac{5}{1}$.

39 Herleid tot één breuk.



a $\frac{5}{2a} + \frac{3}{2a}$

c $\frac{2}{3a} + \frac{3}{2b}$

e $a - \frac{3}{a}$

b $\frac{7}{2a} - \frac{3}{a}$

d $10 - \frac{2}{a}$

f $\frac{5}{ab} - 2$

40 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.



a $A = \frac{5}{x} + \frac{3}{y}$

b $B = \frac{6}{x} - \frac{3}{2x}$

c $C = 5 - \frac{2}{5x}$

A41 Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.



a $N = \frac{3p}{q} - \frac{2}{q}$

c $N = \frac{3}{p} + \frac{2}{q}$

e $N = 2 + \frac{3}{p}$

b $N = \frac{3p}{q} - \frac{3}{2q}$

d $N = \frac{5}{q} : \frac{2}{p}$

f $N = \frac{5p}{6q} - 2$

A42 * Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk en werk zo nodig de haakjes weg.

a $A = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{3x}$

b $B = 5 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}$

c $C = \frac{6}{a} \cdot \frac{5}{a+b} : \frac{4}{a+b}$

A43 * Op een school zitten in totaal T leerlingen. Hiervan zitten er x in havo 4, dus het gedeelte van de leerlingen dat in havo 4 zit, is $\frac{x}{T}$.

Van alle leerlingen in havo 4 zit een zesde deel in klas 4HA. Van de leerlingen in 4HA is drie vijfde deel een meisje.

Het gedeelte van de leerlingen dat in 4HA zit en een meisje is, noemen we M . Er geldt $M = \frac{x}{10T}$.

a Laat zien dat deze formule klopt.

Een vijfde deel van alle leerlingen op de school zit in havo 4, dus $x = \frac{1}{5}T$.

b Gebruik de formules $M = \frac{x}{10T}$ en $x = \frac{1}{5}T$ om te berekenen welk deel van de leerlingen van de school in 4HA zit en een meisje is.

Van de leerlingen die niet in havo 4 zitten, zit een kwart in havo 5. Het gedeelte van de leerlingen van de school dat in havo 5 zit noemen we G .

De formule van G is te schrijven in de vorm $G = \frac{aT + bx}{T}$.

c Bereken a en b .



Terugblik

Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}.$$

Schrijf je het rechterlid van de formule $A = \frac{5}{6} \cdot \frac{3a}{a-1}$ als één breuk, dan

$$\text{krijg je } A = \frac{5}{6} \cdot \frac{3a}{a-1} = \frac{5 \cdot 3a}{6(a-1)} = \frac{15a}{6a-6}.$$

Neem je $a = 2$ in deze formule, dan krijg je $A = \frac{15 \cdot 2}{6 \cdot 2 - 6} = 5$.

Bij het delen door een breuk gebruik je dat delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Zo kun je de formule $C = 60 \cdot \frac{x+3}{4} : \frac{10}{2x-1}$ herleiden tot de vorm

$C = ax^2 + bx + c$. Je krijgt

$$\begin{aligned} C &= 60 \cdot \frac{x+3}{4} \cdot \frac{2x-1}{10} = \frac{60(x+3)(2x-1)}{40} = 1,5(2x^2 - x + 6x - 3) \\ &= 1,5(2x^2 + 5x - 3) = 3x^2 + 7,5x - 4,5. \end{aligned}$$

Dus $a = 3$, $b = 7,5$ en $c = -4,5$.

Breuken optellen en aftrekken

Gelijknamige breuken kun je direct optellen en aftrekken.

Zo is $D = \frac{5}{2a} - \frac{3}{2a}$ te herleiden tot $D = \frac{2}{2a}$, dus $D = \frac{1}{a}$.

Om niet-gelijknamige breuken samen te nemen, maak je ze eerst

gelijknamig. Zo is $E = \frac{5}{2a} - \frac{3}{b} = \frac{5b}{2ab} - \frac{6a}{2ab} = \frac{5b-6a}{2ab}$ en

$$F = 10 - \frac{3}{b} = \frac{10b}{b} - \frac{3}{b} = \frac{10b-3}{b}.$$

Bij het herleiden van de formule $G = \frac{5}{a} - \frac{3}{4a^2}$ gebruik je als noemer $4a^2$.

$$\text{Je krijgt } G = \frac{5}{a} - \frac{3}{4a^2} = \frac{20a}{4a^2} - \frac{3}{4a^2} = \frac{20a-3}{4a^2}.$$

6.4 Rekenen met machten en wortels

044
☐⊗*

Je weet dat $x^2 = x \cdot x$ en $x^3 = x \cdot x \cdot x$.

a Laat zien dat hieruit volgt dat $x^2 \cdot x^3 = x^5$.

b Laat zien dat $(x^2)^3 = x^6$.

c Laat zien dat $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4$.

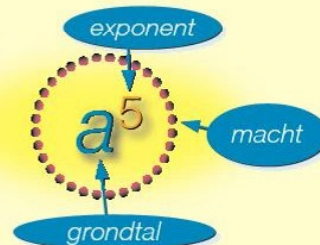
Theorie A Rekenregels voor machten

Je weet dat a^5 een macht van a is.

In de macht a^5 is a het grondtal en 5 de exponent.

a^5 is een korte schrijfwijze voor $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$,
dus voor het product van vijf factoren a .

Rekenen met machten gaat als volgt.



$a^2 \cdot a^5 = \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ factoren}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{5 \text{ factoren}} = a^{2+5} = a^7$	Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten bij elkaar op.
$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{5-2} = a^3$	Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af.
$(a^2)^5 = \underbrace{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}_{5 \text{ factoren } a^2} = a^{2 \cdot 5} = a^{10}$	Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.
$(ab)^4 = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab}_{4 \text{ factoren } ab} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{4 \text{ factoren } a} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{4 \text{ factoren } b} = a^4 b^4$	Bij de macht van een product krijg je een product van machten.

Zo krijg je de volgende rekenregels voor machten.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Hieronder zie je hoe je de rekenregels gebruikt bij het herleiden.

$$(-3a^3)^4 = (-3)^4 \cdot (a^3)^4 = 81a^{12}$$

$$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = -27a^6$$

$$(2a^3)^2 - (a^2)^3 = 4a^6 - a^6 = 3a^6$$

$$a^3 \cdot a^2 + a^3 + a^2 = a^5 + a^3 + a^2 \quad \leftarrow \dots \dots \dots$$

$$\frac{12a^3b}{3ab} = 4a^2$$

Let op: $a^3 \cdot a^2 = a^5$ maar
 $a^3 + a^2$ kan niet korter.

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 \\ \text{Dus } (-2)^4 &= 16. \\ -2^4 &= -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ \text{Dus } -2^4 &= -16. \end{aligned}$$

45 Herleid.

- a** $(a^3)^4$
b $(p^2)^3 \cdot (p^3)^5$
c $(q^3)^4 + (q^6)^2$
d $6a \cdot (a^4)^2$
e $10x^6 - 5(x^2)^3$
f $5(x^8)^2 - 3x^{10}$

46 Herleid.

- a** $\frac{12x^6}{4x^2}$
b $\frac{5x^{10}}{15x^5}$
c $\frac{24a^4b^2}{6ab}$
d $\frac{-15p^6q}{5p^2q}$
e $\frac{14x^3y^2}{24x^2y}$
f $\frac{(2ab)^3}{(3ab)^2}$

A 47 Herleid de volgende formules.

- a** $P = (-2ab)^3 \cdot b$
b $P = (3a)^2 + (2b)^2$
c $P = \frac{30a^3b}{5a^2b}$
d $P = (3a)^3 - 8a^3$
e $P = (5a^4)^2 + (-a^2)^4$
f $P = \frac{(4a^2b)^2}{(-2a)^4}$

O 48 Gegeven zijn de formules $A = 10x^{1,3}$,
 $B = 20x^{0,7}$ en $C = 200x^2$.

- a** Neem de tabel hiernaast over en vul hem in. Rond A en B af op twee decimalen en $A \cdot B$ op gehele.
b Vergelijk de laatste twee rijen van de tabel. Wat valt je op?

x	1	2	3	4	5
A					
B					
$A \cdot B$					
C					

Theorie B Machten met gebroken exponenten

De rekenregels voor machten gelden ook voor machten met gebroken exponenten.

Dus bijvoorbeeld

$$x^{1,5} \cdot x^{2,3} = x^{3,8}$$

$$\frac{x^{6,1}}{x^{5,4}} = x^{0,7}$$

$$(x^{1,75})^2 = x^{3,5}$$

$$(x^{1,4} \cdot y^{2,1})^2 = x^{2,8} \cdot y^{4,2}$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Gebroken getallen zijn breuken of decimale getallen.

Zo is de formule $y = 2x^{1,4} \cdot 3x^{1,7}$ te herleiden tot $y = 6x^{3,1}$.

De formule $y = 6x^{3,1}$ is een machtsformule.

Een formule van de vorm $y = ax^b$ is een **machtsformule**.

Voorbeeld

- a** Herleid de formule $F = 0,054 \cdot (20x^{1,5})^{3,4}$ tot de vorm $F = ax^b$. Rond a af op gehele.
- b** Gegeven zijn de formules $N = 0,6k^{2,25}$ en $k = 15l$.
Schrijf de formule van N in de vorm $N = al^b$. Rond a af op gehele.

Uitwerking

- a** $F = 0,054 \cdot (20x^{1,5})^{3,4} = 0,054 \cdot 20^{3,4} \cdot (x^{1,5})^{3,4} \approx 1432 \cdot x^{5,1}$
Dus $F = 1432x^{5,1}$.
- b** Invullen van $k = 15l$ in $N = 0,6k^{2,25}$ geeft
 $N = 0,6 \cdot (15l)^{2,25} = 0,6 \cdot 15^{2,25} \cdot l^{2,25} \approx 266 \cdot l^{2,25}$.
Dus $N = 266l^{2,25}$.

49 Herleid de volgende formules.



- a** $A = x^{1,2} \cdot x^{3,4}$ **d** $D = \frac{(xy)^{1,6}}{x^{1,4}y^{1,2}}$
- b** $B = \frac{x^{5,6}}{x^{4,9}}$ **e** $E = (x^2y^3)^{1,1}$
- c** $C = (x^{1,2})^{3,1}$ **f** $F = \left(\frac{x^{1,75}}{x^{1,35}}\right)^{1,5}$

50 Herleid de volgende formules tot de vorm $y = ax^b$. Rond a af op gehele.



- a** $y = (100x^{0,6})^{1,4}$
- b** $y = 12,8 \cdot (25x^{1,8})^{1,1}$
- c** $y = 0,0018 \cdot (312x^{0,75})^2$

51 **a** Herleid de formule $A = (250p^4)^{1,16}$ tot de vorm $A = ap^b$. Rond a af op gehele.



- b** Gegeven is de formule $B = \frac{0,18(13,5q^{0,8})^{2,5}}{q^{0,6}}$.
Schrijf de formule in de vorm $B = aq^b$. Rond a af op gehele.
- c** De formule $C = 1250(6,12x^{1,3}y^{2,7})^{0,5}$ is te schrijven in de vorm $C = ax^by^c$.
Bereken a , b en c . Rond a af op gehele.

52 **a** Gegeven zijn de formules $K = 20p^{1,15}$ en $p = 80q$.
Schrijf de formule van K in de vorm $K = aq^b$. Rond a af op gehele.



- b** Gegeven zijn de formules $L = 0,05t^{2,5}$ en $t = 155w^{0,6}$.
Schrijf de formule van L in de vorm $L = aw^b$. Rond a af op gehele.
- c** Gegeven zijn de formules $M = 50f^{0,75} \cdot g^{1,25}$ en $g = 20f^2$.
Schrijf de formule van M in de vorm $M = af^b$. Rond a af op gehele.

A53
☐⊙*

Biologen hebben onderzoek gedaan naar de soortenrijkdom van planten en dieren op een aantal eilanden in het Caribisch gebied. Ze vonden voor het aantal soorten N van amfibieën en reptielen het verband $N = 3,3A^{0,3}$. Hierin is N het aantal soorten op het eiland en A de oppervlakte van het eiland in vierkante mijlen.

- a Bereken het aantal soorten op een eiland met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen.
- b Er geldt: bij elke verdubbeling van de oppervlakte hoort een toename van het aantal soorten met een vast percentage. Bereken dit percentage. Rond af op gehelen.
- c Om de formule om te zetten in de vorm $N = aB^{0,3}$ waarin B de oppervlakte in vierkante kilometer is, gebruik je dat 1 vierkante mijl gelijk is aan 2,6 vierkante km, dus dat $A = 2,6B$. Bereken a . Rond af op één decimaal.



A54
*

Voor het berekenen van de braadtijd van kalkoenen wordt de formule $T = 1,42G^{0,65}$ gebruikt. Hierin is G het gewicht van de kalkoen in kg en T de braadtijd in uren.

Deze formule is te herleiden tot de vorm $t = ag^b$ waarin g het gewicht van de kalkoen in gram is, en t de braadtijd in minuten.

Geef deze formule. Rond verstandig af.

O55
☐⊙*

In de tabel hiernaast kun je zowel in de exponenten als in de getallen rechts van het =-teken een regelmaat herkennen.

- a Hoe volgt uit deze regelmaat dat $2^0 = 1$ en $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$?
- b Vul in: $2^{-3} = \frac{1}{2^{\dots}}$ en $2^{-4} = \frac{1}{2^{\dots}}$.

$2^5 =$	32
$2^4 =$	16
$2^3 =$	8
$2^2 =$	4
$2^1 =$	...
$2^0 =$	...
$2^{-1} =$	...
$2^{-2} =$	...
$2^{-3} =$	...

Theorie C Machten met negatieve exponenten

In opgave 55 heb je ontdekt dat $2^0 = 1$. En zo is ook $3^0 = 1$.
Voor $a \neq 0$ geldt in het algemeen $a^0 = 1$.

In opgave 55 zag je ook dat $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ en $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

En zo is ook $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$ en $5^{-4} = \frac{1}{5^4}$.

Voor $a \neq 0$ geldt in het algemeen $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

Voor $a \neq 0$ geldt $a^0 = 1$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$.

De rekenregels voor machten gelden ook bij negatieve exponenten.
Zie het voorbeeld.

Je weet $\frac{a^3}{a^3} = 1$.

Ook geldt $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$.

Conclusie: $a^0 = 1$.

Je weet $\frac{a^0}{a^3} = \frac{1}{a^3}$.

Ook geldt $\frac{a^0}{a^3} = a^{0-3} = a^{-3}$.

Conclusie: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Voorbeeld

Schrijf als macht van a .

a $a^{-7} \cdot a^3$

b $\frac{a^3}{a^{-8}}$

c $a \cdot (a^2)^{-5}$

d $a^5 \cdot \frac{1}{a}$

Uitwerking

a $a^{-7} \cdot a^3 = a^{-7+3} = a^{-4}$

b $\frac{a^3}{a^{-8}} = a^{3-(-8)} = a^{3+8} = a^{11}$

c $a \cdot (a^2)^{-5} = a \cdot a^{-10} = a^{1-10} = a^{-9}$

d $a^5 \cdot \frac{1}{a} = a^5 \cdot a^{-1} = a^{5-1} = a^4$

$\frac{1}{a} = \frac{1}{a^1} = a^{-1}$

Ook bij het herleiden van formules krijg je te maken met machten met negatieve exponenten. Zie het voorbeeld hieronder.

Voorbeeld

Herleid de formule $P = \frac{x^{2,4}}{(1,2x^{3,1})^2}$ tot de vorm $P = ax^b$. Rond a af op twee decimalen.

Uitwerking

$$P = \frac{x^{2,4}}{(1,2x^{3,1})^2} = \frac{x^{2,4}}{1,2^2 \cdot (x^{3,1})^2} = \frac{x^{2,4}}{1,44x^{6,2}} \approx 0,69x^{-3,8} \leftarrow \frac{x^{2,4}}{1,44x^{6,2}} = \frac{1}{1,44} \cdot x^{2,4-6,2}$$

Dus $P = 0,69x^{-3,8}$.

56 Schrijf als macht van a .



a $a^{-5} \cdot a^2$

d $(a^{-3})^4$

g 1

b $\frac{a}{a^{-2}}$

e $\frac{a^7}{a^0}$

h $a^3 \cdot (a^4)^{-2}$

c $a^4 \cdot \frac{1}{a}$

f $\frac{a^4}{\left(\frac{1}{a^3}\right)}$

i $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3$

57
 *

a Herleid de formule $C = \frac{10x^{3,2}}{(4,5x^{2,5})^2}$ tot de vorm $C = ax^b$. Rond a af op twee decimalen.

b Herleid de formule $D = \frac{2t^{1,6} \cdot 4t^{2,4}}{15t^6}$ tot de vorm $D = at^b$.

c Herleid de formule $E = \frac{(250p^{1,16})^{1,5}}{313p^4}$ tot de vorm $E = ap^b$. Rond a af op één decimaal.

A58
 *

a Gegeven zijn de formules $M = 105x^{-1,6}y^{1,2}$ en $y = 1,5x^{-0,8}$. Schrijf de formule van M in de vorm $M = ax^b$. Rond a af op gehele.

b Gegeven zijn de formules $N = \frac{21p^{1,5}}{16q^{1,6}}$ en $q = 7,5p^2$.

Schrijf de formule van N in de vorm $N = ap^b$. Rond a af op drie decimalen.

A59
 *

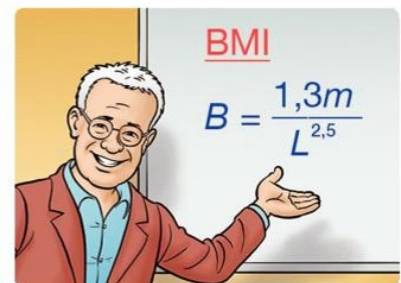
Professor Trefethen hanteert de formule $B = \frac{1,3m}{L^{2,5}}$ voor

het berekenen van de body-mass index (BMI). In deze formule is m het gewicht in kg en L de lengte in meter.

a Bereken met deze formule de BMI van iemand met een lengte van 1,75 meter en een gewicht van 80 kg. Rond af op één decimaal.

b Voor personen met een lengte van 170 cm is de formule te schrijven in de vorm $B = am$. Bereken a . Rond af op drie decimalen.

c Voor personen met een gewicht van 75 kg is de formule te schrijven in de vorm $B = bL^c$. Bereken b en c .



E60
*

Harry schrijft een rij getallen op. Hij begint met 1 en het tweede getal is 2. Elk getal daarna maakt hij als volgt. Hij deelt het voorlaatst opgeschreven getal door het laatst opgeschreven getal. Schrijf het 10^e getal dat hij zo krijgt als macht van 2.

Je weet $(\sqrt{10})^2 = 10$.

- a Wat is $(\sqrt{x})^2$? En wat is $(\sqrt{2a})^2$?
- b Druk P uit in B in de formule $B = \sqrt{0,5P}$. Kwadrateer eerst het linker- en rechterlid.

Theorie D Rekenregels voor wortels

Je weet dat het kwadraat van $\sqrt{5}$ gelijk is aan 5, dus $(\sqrt{5})^2 = 5$.

In het algemeen is $(\sqrt{A})^2 = A$.

Dit kun je gebruiken om bij $\sqrt{A} = B$ de wortel weg te werken.

Kwadrateer het linkerlid en het rechterlid. Je krijgt $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$.

$\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$

Deze regel gebruik je ook om bij de formule $F = 20\sqrt{0,1G}$ de variabele G uit te drukken in F . Je krijgt

$$F = 20\sqrt{0,1G} \quad \text{Verwissel het linker- en rechterlid.}$$

$$20\sqrt{0,1G} = F \quad \text{Deel links en rechts door 20, het rechterlid wordt } \frac{1}{20}F = 0,05F.$$

$$\sqrt{0,1G} = 0,05F \quad \text{Kwadrateer het linker- en het rechterlid.}$$

$$0,1G = (0,05F)^2 \quad \text{Gebruik } (ab)^p = a^p b^p.$$

$$0,1G = 0,0025F^2 \quad \text{Deel links en rechts door 0,1 oftewel vermenigvuldig links en rechts met 10.}$$

$$G = 0,025F^2$$

$$\text{Je weet } \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\text{Ook geldt } \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$\text{Dus } \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}. \text{ Net zo is } \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}.$$

$$\text{Je weet } \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{Ook geldt } \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$\text{Dus } \sqrt{\frac{64}{16}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}. \text{ Net zo is } \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Rekenregels voor wortels

$$\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \text{ en } \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$$

Andersom geldt ook

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B}$$

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

De rekenregels voor wortels kun je ook gebruiken als er letters onder het wortelteken voorkomen.

$$\text{Zo is } \sqrt{2p} \cdot \sqrt{5q} = \sqrt{2p \cdot 5q} = \sqrt{10pq}.$$

Het is mogelijk $\sqrt{10pq}$ te herleiden tot de vorm $c\sqrt{pq}$.

$$\text{Je krijgt } \sqrt{10pq} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{pq} \approx 3,16\sqrt{pq}.$$

Je ziet dat c is afgerond op twee decimalen.

Bij het herleiden van de formule $A = \sqrt{16pq}$ tot de vorm $A = c\sqrt{pq}$ hoef je c niet af te ronden.

$$\text{Immers } A = \sqrt{16pq} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{pq} = 4\sqrt{pq}.$$

Voorbeeld

a Schrijf de formule $M = 50\sqrt{12,25t}$ in de vorm $M = a\sqrt{t}$.

b Schrijf de formule $N = 5\sqrt{2p + 3q}$ in de vorm $N = \sqrt{ap + bq}$.

c Schrijf de formule $R = 10\sqrt{\frac{k}{3,5}}$ in de vorm $k = aR^2$.

Uitwerking

a $M = 50\sqrt{12,25t} = 50 \cdot \sqrt{12,25} \cdot \sqrt{t} = 50 \cdot 3,5 \cdot \sqrt{t} = 175\sqrt{t}$

Dus $M = 175\sqrt{t}$.

b $N = 5\sqrt{2p + 3q} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2p + 3q} = \sqrt{25(2p + 3q)} = \sqrt{50p + 75q}$

Dus $N = \sqrt{50p + 75q}$.

Denk aan de haakjes.

c $R = 10\sqrt{\frac{k}{3,5}}$ Verwissel het linker- en rechterlid.

$10\sqrt{\frac{k}{3,5}} = R$ Deel links en rechts door 10.

$\sqrt{\frac{k}{3,5}} = 0,1R$ Kwadrateer het linker- en rechterlid.

$\frac{k}{3,5} = 0,01R^2$ Vermenigvuldiging het linker- en rechterlid met 3,5.

$k = 0,035R^2$

62 Schrijf bij de volgende formules het rechterlid als één wortel.



a $A = \sqrt{3a} \cdot \sqrt{5b}$

b $A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3ab}$

c $A = \frac{\sqrt{10a}}{\sqrt{5}}$

d $A = \sqrt{3p} \cdot \sqrt{1,5q}$

e $A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3x} \cdot \sqrt{12y}$

f $A = \frac{\sqrt{20xy}}{\sqrt{2y}}$

63 Schrijf de volgende formules in de vorm $A = c\sqrt{ab}$.



Rond c zo nodig af op twee decimalen.

a $A = \sqrt{5a} \cdot \sqrt{6b}$

b $A = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3ab}$

c $A = 6\sqrt{3a} \cdot \sqrt{7b}$

d $A = 4\sqrt{25ab}$

e $A = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2a} \cdot \sqrt{3b}$

f $A = \frac{\sqrt{20a^2b}}{\sqrt{10a}}$

A64 **a** Schrijf de formule $C = 0,04\sqrt{225x}$ in de vorm $C = a\sqrt{x}$.



b Schrijf de formule $D = 0,05\sqrt{420y}$ in de vorm $D = \sqrt{ay}$.

c Schrijf de formule $E = 0,8\sqrt{0,2t+5}$ in de vorm $E = \sqrt{at+b}$.

A65 **a** Schrijf de formule $F = 25\sqrt{0,1P}$ in de vorm $P = aF^2$.



b Schrijf de formule $G = 0,05\sqrt{\frac{Q}{12,5}}$ in de vorm $Q = aG^2$.

c Maak R vrij bij de formule $H = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3R}{14}}$.

A66

Winkels hebben van de artikelen die ze verkopen een bepaalde voorraad. Deze voorraad moet niet te groot zijn, want dan krijg je te maken met hoge voorraadkosten. Een winkel moet dus niet te grote bestellingen in één keer doen. Ook heeft de winkel te maken met de kosten die gemoeid zijn met het doen van een bestelling: de bestelkosten. Met de *formule van Camp* is de optimale bestelhoeveelheid te berekenen voor winkels die te maken hebben met een constante vraag naar een bepaald artikel.



Deze formule is $Q = \sqrt{\frac{2Bn}{V}}$. Hierin is

- Q de optimale bestelhoeveelheid
 - B de bestelkosten in euro's, ongeacht de grootte van de bestelling
 - n het aantal verkochte artikelen per jaar
 - V de voorraadkosten in euro's per stuk per jaar.
- a** Een winkel verkoopt per jaar 2400 vazen van een bepaald model. De bestelkosten zijn 15 euro en de voorraadkosten per vaas per jaar zijn 5 cent.
Toon aan dat de winkel twee keer per jaar een bestelling zal plaatsen.
- b** Een andere winkel verkoopt per jaar 800 droogmolens.
Schrijf voor deze winkel de formule van Camp in de vorm $Q = c\sqrt{\frac{B}{V}}$.
- c** Voor een winkel zijn de bestelkosten voor het bestellen van strijkplanken 25 euro en zijn de voorraadkosten 80 cent per strijkplank per jaar.
De optimale bestelhoeveelheid is te schrijven in de vorm $Q = d\sqrt{n}$.
Bereken d . Rond af op één decimaal.
- d** Van een artikel worden per jaar 3000 stuks verkocht. De voorraadkosten zijn 12 cent per stuk per jaar.
Geef voor dit artikel de formule waarbij de bestelkosten zijn uitgedrukt in de optimale bestelhoeveelheid.

A67

Zie opgave 66.

De voorraadkosten V worden soms berekend met de formule $V = 0,01p \cdot I$. Hierin is I de inkoopprijs per stuk van een artikel en is p een percentage. Dit percentage geeft aan hoeveel procent van de inkoopprijs aan voorraadkosten wordt uitgegeven. Bij een inkoopprijs van 60 euro per stuk en een percentage van 0,5% zijn de voorraadkosten dan $0,01 \cdot 0,5 \cdot 60 = 0,3$, dus 30 cent per stuk per jaar.
Een winkel verkoopt per jaar 200 hogedrukreinigers van type A. De inkoopprijs van deze hogedrukreinigers is 160 euro per stuk en de bestelkosten per bestelling zijn 25 euro. Bij een optimale bestelhoeveelheid blijken vier bestellingen per jaar te horen.
Bereken p .

Terugblik

Rekenregels voor machten

De rekenregels voor machten zijn

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, (a^p)^q = a^{pq} \text{ en } (ab)^p = a^p b^p.$$

$$\text{Zo is } x^4 \cdot x^3 = x^7, \frac{x^{12}}{x^3} = x^9, (x^3)^4 = x^{12} \text{ en } (3x^4)^3 = 27x^{12}.$$

Let op dat $x^4 + x^3$ niet kan worden herleid.

$$\text{Dus } (4x^2)^2 + \frac{x^8}{x^5} = 16x^4 + x^3, \text{ maar } (4x^2)^2 + \frac{x^9}{x^5} = 16x^4 + x^4 = 17x^4.$$

Gebroken en negatieve exponenten

De rekenregels voor machten gelden ook voor gebroken exponenten.

Voor negatieve exponenten geldt de regel $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Ook is $a^0 = 1$ voor $a \neq 0$.

Zo is de formule $M = 0,025 \cdot (30x^{1,6})^{1,4}$ te herleiden tot de vorm $M = ax^b$.

$$M = 0,025 \cdot (30x^{1,6})^{1,4} = 0,025 \cdot 30^{1,4} \cdot (x^{1,6})^{1,4} \approx 2,92 \cdot x^{2,24}$$

Dus de formule is $M = 2,92x^{2,24}$.

Door $y = 10x^{1,2}$ in te vullen in de formule $N = \frac{520}{y^{0,4}}$ is de formule van N te

schrijven in de vorm $N = ax^b$. Je krijgt

$$N = \frac{520}{(10x^{1,2})^{0,4}} = \frac{520}{10^{0,4} \cdot x^{0,48}} = \frac{520}{10^{0,4}} \cdot x^{-0,48} \approx 207 \cdot x^{-0,48}.$$

Dus $a = 207$, $b = -0,48$ en de formule is $N = 207x^{-0,48}$.

Rekenregels voor wortels

Bij de formule $P = 25\sqrt{0,002Q}$ is de variabele Q vrij te maken door te gebruiken dat $\sqrt{A} = B$ geeft $A = B^2$. Je verwisselt eerst het linker- en het

rechterlid. Je krijgt $25\sqrt{0,002Q} = P$

$$\sqrt{0,002Q} = 0,04P$$

$$0,002Q = 0,0016P^2$$

$$Q = 0,8P^2$$

Met de rekenregels $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ en $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ zijn allerlei

herleidingen te maken.

Zo is de formule $K = 0,8\sqrt{16x}$ te herleiden tot de vorm $K = a\sqrt{x}$ en ook tot de vorm $K = \sqrt{bx}$.

$$K = 0,8\sqrt{16x} = 0,8 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = 0,8 \cdot 4 \cdot \sqrt{x} = 3,2\sqrt{x} \text{ en}$$

$$K = 0,8\sqrt{16x} = \sqrt{0,8^2 \cdot 16x} = \sqrt{0,8^2 \cdot 16 \cdot x} = \sqrt{10,24x}$$

6.5 Formules met exponenten

O68 Gegeven is de formule $N = 50 \cdot 1,12^t$.

- a** Bereken N voor $t = 0$.
b Bereken N voor $t = 1$ en voor $t = 2$.
c Schets de grafiek van N . Neem t tussen 0 en 20.

O69 Je weet $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, dus ook $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$.

- a** Vul in $\frac{1}{4^t} = 4^{\dots}$.

Je weet $(a^p)^q = a^{pq}$, dus ook $a^{pq} = (a^p)^q$.

- b** Vul in $4^{-t} = (4^{\dots})^t$.

- c** Laat zien dat de formule $N = 15 \cdot \frac{1}{4^t}$ te schrijven is als $N = 15 \cdot 0,25^t$.

Theorie A Exponentiële groei

De formule $N = 80 \cdot 1,15^t$ hoort bij **exponentiële groei**.

Is t de tijd in jaren dan wordt de hoeveelheid elk jaar met 1,15 vermenigvuldigd, dit is de **groefactor** per jaar.

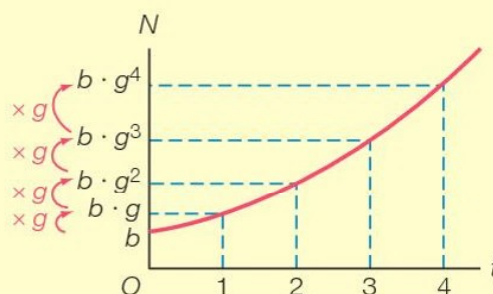
Op $t = 0$ is $N = 80 \cdot 1,15^0 = 80$, dit is de **beginwaarde** (of beginhoeveelheid).

Bij een beginwaarde b en groefactor per tijdseenheid g ontstaat de formule van exponentiële groei als volgt.

Op $t = 0$ is	$N = b$	$= b \cdot g^0$
Op $t = 1$ is	$N = b \cdot g$	$= b \cdot g^1$
Op $t = 2$ is	$N = b \cdot g \cdot g$	$= b \cdot g^2$
Op $t = 3$ is	$N = b \cdot g \cdot g \cdot g$	$= b \cdot g^3$
$\vdots$		
Op tijdstip t is	$N = b \cdot \underbrace{g \cdot g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{t \text{ keer}} = b \cdot g^t$	

Bij exponentiële groei

- wordt de hoeveelheid per tijdseenheid met hetzelfde getal (de groefactor) vermenigvuldigd
- hoort een formule van de vorm $N = b \cdot g^t$, waarin b de beginwaarde (of beginhoeveelheid) is en g de groefactor per tijdseenheid.



In de formule $N = 800 \cdot 1,3^t$ herken je

- de beginwaarde is 800
- de groeifactor per tijdseenheid is 1,3.

Voor $t = 5$ is $N = 800 \cdot 1,3^5 \approx 2970$.

In de formule $N = b \cdot g^t$ staat de variabele t in de exponent. Let op het verschil tussen de formule $N = 50 \cdot t^{1,12}$ en de formule $N = 50 \cdot 1,12^t$.

De formule $N = 50 \cdot t^{1,12}$ is een machtsformule en de formule $N = 50 \cdot 1,12^t$ is een **exponentiële formule**.

Bij een exponentiële formule staat de variabele in de exponent.

De formule $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t}$ is te herleiden tot $M = 11 \cdot 0,4^t$.

Daarbij worden de regels $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ en $(a^p)^q = a^{pq}$ gebruikt.

Dus $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t} = 11 \cdot 2,5^{-t} = 11 \cdot 2,5^{-1 \cdot t} = 11 \cdot (2,5^{-1})^t = 11 \cdot 0,4^t$.

$\frac{1}{a^p} = a^{-p}$

$-t = -1 \cdot t$

$a^{pq} = (a^p)^q$

$2,5^{-1} = 0,4$

Hiermee is de formule $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t}$ geschreven in de vorm $M = b \cdot g^t$.

Dus ook de formule $M = 11 \cdot \frac{1}{2,5^t}$ is een exponentiële formule.

Voorbeeld

Schrijf de formule $P = \frac{84}{15 \cdot 0,8^t}$ in de vorm $P = b \cdot g^t$.

Uitwerking

$$P = \frac{84}{15 \cdot 0,8^t} = \frac{84}{15} \cdot 0,8^{-t} = 5,6 \cdot (0,8^{-1})^t = 5,6 \cdot 1,25^t$$

Dus $P = 5,6 \cdot 1,25^t$.

Voorbeeld

Gegeven is de formule $K = (85 - 2,5A + 1,6B) \cdot 0,9^A$.

Neem $A = 10$ en schrijf de formule van K in de vorm $K = aB + b$.

Rond a en b af op twee decimalen.

Uitwerking

$A = 10$ invullen in de formule van K geeft

$$K = (85 - 2,5 \cdot 10 + 1,6B) \cdot 0,9^{10}$$

$$K = (60 + 1,6B) \cdot 0,348...$$

$$K \approx 20,92 + 0,56B$$

Dus $K = 0,56B + 20,92$.

70
□ ⊗ *

- a In het eerste voorbeeld van de vorige bladzijde is de formule

$$P = \frac{84}{15 \cdot 0,8^t} \text{ herleid tot } P = 5,6 \cdot 1,25^t.$$

Geef van de formule van P de beginwaarde en de groeifactor.

- b Zie het tweede voorbeeld op de vorige bladzijde.

Wat voor soort formule is de formule $K = 0,56B + 20,92$?

71
□

Gegeven is de formule $N = 200 \cdot 0,86^t$.

- a Schets de grafiek van N . Neem t tussen 0 en 20.

- b Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek van N dalend is?

- c Bereken voor welke t geldt dat $N = 50$. Rond af op één decimaal.

72
□ ⊗

Gegeven zijn de formules $N = 20 \cdot 1,15^t$ en $M = 150 \cdot 0,92^t$.

- a Schets de grafieken in één figuur. Neem t tussen 0 en 20.

- b Bereken voor welke t geldt dat $N = M$. Rond af op twee decimalen.

- c Met hoeveel procent neemt N toe tussen $t = 0$ en $t = 3$?

Met hoeveel procent neemt M af tussen $t = 0$ en $t = 3$?

A73
□ ⊗ *

Gegeven zijn de formules $K = 18 \cdot 1,06^t$ en $L = 95 \cdot 0,95^t$. Hierin is t de tijd in dagen met t tussen 0 en 20.

- a Met hoeveel procent neemt K toe tussen $t = 0$ en $t = 4$?

Met hoeveel procent neemt L af tussen $t = 0$ en $t = 4$?

- b Op een gegeven moment is $K = 36,22$.

Hoeveel dagen duurt het dan nog totdat $K = L$? Rond af op één decimaal.

74
□ ⊗ *

- a Schrijf de formule $N = 3,2 \cdot \frac{5,6}{4 \cdot 1,25^t}$ in de vorm $N = b \cdot g^t$.

- b Gegeven is de formule $M = (550 + 2p + 3q) \cdot 0,88^q$.

Neem $q = 5$ en schrijf de formule van M in de vorm $M = ap + b$.

Rond a af op twee decimalen en b op gehelen.

A75
□ ⊗ *

- a Gegeven is de formule $F = 100 \left(2 + \frac{25}{12 \cdot 0,9^t} \right)$.

Schrijf de formule van F in de vorm $F = a + b \cdot g^t$. Rond b af op gehelen en g op twee decimalen.

- b Gegeven is de formule $G = \frac{51}{y} (x - x \cdot 0,8^y)$.

Neem $y = 5,6$ en schrijf de formule van G in de vorm $G = ax$. Rond a af op twee decimalen.

- c Gegeven is de formule $H = 5 \cdot 0,75^t - \frac{12}{5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^t}$.

De formule van H is te schrijven in de vorm $H = b \cdot 0,75^t$.

Bereken b .

E76*****

Het aantal snoeken in een meer is gegeven door een formule van de vorm

$N = \frac{520}{1 + b \cdot g^t}$. Hierin is t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2000.

Op 1 januari 2000 is $N = 26$ en op 1 januari 2005 is $N = 55$.

Bereken b en g en bereken hiermee in tientallen het aantal snoeken op 1 januari 2020.



Terugblik

De formule $N = b \cdot g^t$

De formule $N = b \cdot g^t$ hoort bij exponentiële groei. De beginwaarde is b en de groeifactor per tijdseenheid is g .

Je kunt de formule $N = 150 \cdot \frac{20}{3 \cdot 1,2^t}$ herleiden tot de vorm $N = b \cdot g^t$.

Je krijgt $N = 150 \cdot \frac{20}{3 \cdot 1,2^t} = \frac{150 \cdot 20}{3} \cdot 1,2^{-t} = 1000 \cdot (1,2^{-1})^t \approx 1000 \cdot 0,83^t$,

dus $N = 1000 \cdot 0,83^t$. In deze formule is de beginwaarde 1000 en de groeifactor 0,83. Hiernaast is de grafiek van N geschetst.



Herleiden van formules met exponenten

Neem je voor m een getal in de formule $T = \frac{60}{m}(10n - n \cdot 1,14^m)$ dan is de formule van T te herleiden tot de vorm $T = an$.

Neem je $m = 16$, dan krijg je

$$T = \frac{60}{16}(10n - n \cdot 1,14^{16}) = 3,75(10n - n \cdot 8,137...) = 3,75 \cdot 1,862...n \approx 6,99n,$$

dus $T = 6,99n$.

De formule $Z = 2 \cdot 2,5^t + \frac{60}{0,4^t}$ is te herleiden tot de vorm $Z = b \cdot g^t$.

Dat gaat als volgt.

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + \frac{60}{0,4^t}$$

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot 0,4^{-t}$$

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot (0,4^{-1})^t$$

$$Z = 2 \cdot 2,5^t + 60 \cdot 2,5^t$$

$$Z = 62 \cdot 2,5^t$$

Eindopdracht Het elandjong

In de beginopdracht heb je gerekend met de formules $E_{\text{basis}} = 140W^{0,75}$ en $E_{\text{beschikbaar}} = 2200\sqrt{W} - 40W - 11\,500$.

Hierin is E_{basis} het aantal kcal per dag dat een eland van W kg nodig heeft om op gewicht te blijven. $E_{\text{beschikbaar}}$ is het aantal kcal per dag dat een eland van W kg meer aan energie binnenkrijgt dan dat het zoeken naar voedsel kost.

In de beginopdracht heb je gezien dat er een snijpunt van de grafieken is tussen $W = 50$ en $W = 100$. Met de formules kun je nagaan dat er ook nog een snijpunt is tussen $W = 600$ en $W = 700$.

- Bereken welke gewichten bij deze snijpunten horen. Wat betekent het voor een eland als zijn gewicht rechts van het tweede snijpunt ligt?

Bij het optimale gewicht van een eland is $E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$ maximaal.

- Bereken met behulp van de formules wat het optimale gewicht van een eland is.

Hoeveel kcal per dag houdt de eland dan over voor andere activiteiten dan het zoeken naar voedsel?

Een elandjong is na de geboorte afhankelijk van moedermelk. Deze afhankelijkheid duurt totdat een gewicht is bereikt waarop het kalf zelf voor zijn voedsel kan zorgen. Een kalf werd op 1 juni geboren en woog bij de geboorte 14 kg. De eerste maand geldt een dagelijkse groeifactor van 1,03 voor het gewicht en daarna neemt het gewicht met 1 kg per dag toe.



- Onderzoek vanaf welke datum het kalf kan ophouden met drinken bij de moeder en zelfstandig voor zijn voedsel kan zorgen.

De biologen die de formules voor E_{basis} en $E_{\text{beschikbaar}}$ hebben opgesteld, zoeken naar een eenvoudige formule voor $V = E_{\text{beschikbaar}} - E_{\text{basis}}$. Volgens één van de biologen voldoet de formule $V_{\text{kcal}} = -0,05W^2 + 30W$ voor waarden van W tussen 100 en 500.

- Ben je het met deze bioloog eens? Licht je antwoord toe met enkele berekeningen.

De bioloog wil de formule $V_{\text{kcal}} = -0,05W^2 + 30W$ zo schrijven dat de energie in kJ wordt gegeven. Deze formule is van de vorm $V_{\text{kJ}} = aW^2 + bW$.

- Bereken a en b . Gebruik dat $V_{\text{kJ}} = 4,19V_{\text{kcal}}$.

Diagnostische toets

6.1 Formules combineren en herleiden

- 1** **a** Gegeven zijn de formules $R = 3p - q + 2$ en $q = p + 2$.
Combineer deze formules en druk R uit in p .
- b** Gegeven zijn de formules $A = 2kl + 3$ en $k = l + 2$.
Schrijf de formule van A in de vorm $A = al^2 + bl + c$.
- c** De formules $K = 0,06pq + 1,25$ en $2p + 4q = 11$ zijn te combineren tot de vorm $K = aq^2 + bq + c$.
Bereken a , b en c .
- 2** Bij lage temperaturen kan onbedekte huid van een mens bevriezen. Dit verschijnsel wordt frostbite genoemd. Hierbij gebruikt men de formule $F = (2000 - 16,3v)(-5 - T)^{-1,668}$. Hierin is F het aantal minuten dat een mens met onbedekte huid buiten kan zijn voordat de huid bevriest, v de windsnelheid in km/uur en T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$.
Schrijf de formule van F in de vorm $F = av + b$ voor een dag waarop de temperatuur -12°C is. Rond a en b af op twee decimalen.
Van welk verband is sprake bij deze formule?

6.2 Formules en de grafische rekenmachine

- 3** Voor het dagelijks verloop van het aantal auto's in de parkeergarage van een groot winkelcentrum is de formule $N = -0,36t^4 + 13,8t^3 - 176t^2 + 790t$ opgesteld. Hierin is N het aantal auto's en t de tijd in uren met $t = 0$ om 6:00 uur.
- a** Schets de grafiek van N .
- b** Bereken het aantal auto's dat om 21:00 uur in de parkeergarage staat.
- c** Bereken het aantal auto's bij elk maximum.
- d** Vanaf 9:00 uur is het aantal auto's zo groot, dat het lastig is een vrije plek te vinden.
Bereken tot welk tijdstip deze drukte aanhoudt. Rond af op minuten.
- e** Meneer Van den Berg wil het winkelcentrum tijdens de middag bezoeken. Hij wil graag dat er dan veel parkeerruimte is.
Wat is op basis van de formule het gunstigste tijdstip? Rond af op halve uren.

6.3 Formules met breuken

- 4** Schrijf het rechterlid van de formule als één breuk.

a $A = \frac{4}{3x} + \frac{1}{x}$	c $C = \frac{8}{9x} \cdot \frac{3}{4x}$
b $B = \frac{2}{x} - \frac{4}{y}$	d $D = \frac{5}{6x} : 1\frac{1}{3}$

- 5** Van de T bomen in een gemeente zijn er p besmet met processierupsen. Het gedeelte van de besmette bomen is dus $\frac{p}{T}$. Van deze bomen is driekwart bekend bij de gemeente en daarvan is de helft gemarkeerd met lint. Het gedeelte gemarkeerde bomen M wordt gegeven door $M = \frac{3p}{8T}$.



- a** Laat zien dat deze formule klopt.
- b** De gemeente gaat ervan uit dat geldt $p = \frac{2}{3}T$. Bereken welk deel van de bomen in de gemeente gemarkeerd is.

6.4 Rekenen met machten en wortels

- 6** Combineer de formules en druk K uit in q .

- a** $K = p^2 + 5q^6$ en $p = -5q^3$
- b** $K = \frac{p^{0,6}}{8q^{0,1}}$ en $p = 32q^{0,4}$
- c** $K = 10p^{1,5}q^{-1,5}$ en $p = 9q^3$
- d** $K = (4p)^{2,5}$ en $p = \frac{1}{q^{0,4}}$

- 7**
- a** Schrijf de formule $A = 0,1\sqrt{64x}$ in de vorm $A = a\sqrt{x}$.
 - b** Schrijf de formule $B = 2\sqrt{0,5y - 1,5}$ in de vorm $B = \sqrt{ay + b}$.
 - c** Schrijf de formule $C = 0,4\sqrt{\frac{t}{2,4}}$ in de vorm $t = aC^2$.
 - d** Maak q vrij bij $D = \frac{\sqrt{20q^{2,2}}}{\sqrt{5q^{0,2}}}$.

6.5 Formules met exponenten

- 8** Gegeven is de formule $N = \frac{\sqrt{1,5A}}{1,6^B}$.

- a** Neem $A = 6$ en schrijf de formule in de vorm $N = a \cdot g^B$.
- b** Neem $B = -1$ en schrijf de formule in de vorm $N = c\sqrt{A}$. Rond c af op twee decimalen.
- c** Voor $N = 1$ en $A = 24$ is de waarde van B ongeveer 3,8. Bereken de waarde van B . Rond af op twee decimalen.